6.) Negatif Binom Dağılımı (Pascal)

Bu dağılım geometrik dağılımın genelleştirilmiş halidir. X t.d. k tane ($k \geq 1$) başarının elde edilmesi için yapılan denemelerin sayısı ise bu t.d. ye Negatif binom t.d. denir. Olasılık fonksiyonu,

$$p(X=x) = \binom{x-1}{k-1} p^k \cdot q^{x-k} \quad , \quad x = k, k+1, \ldots$$

bu dağılıma pascal dağılımı da denir.

$$E(x) = \frac{k}{p} \quad , \quad V(x) = \frac{k \cdot q}{p^2}$$

İspat: X_1: ilk başarıya kadar gereken denemelerin sayısı,

X_2: ilk başarı ile 2. başarı arasındaki denemelerin sayısı,

⋮

X_k: $(k-1)$. başarı ile k. başarı arasındaki deneme sayısı.

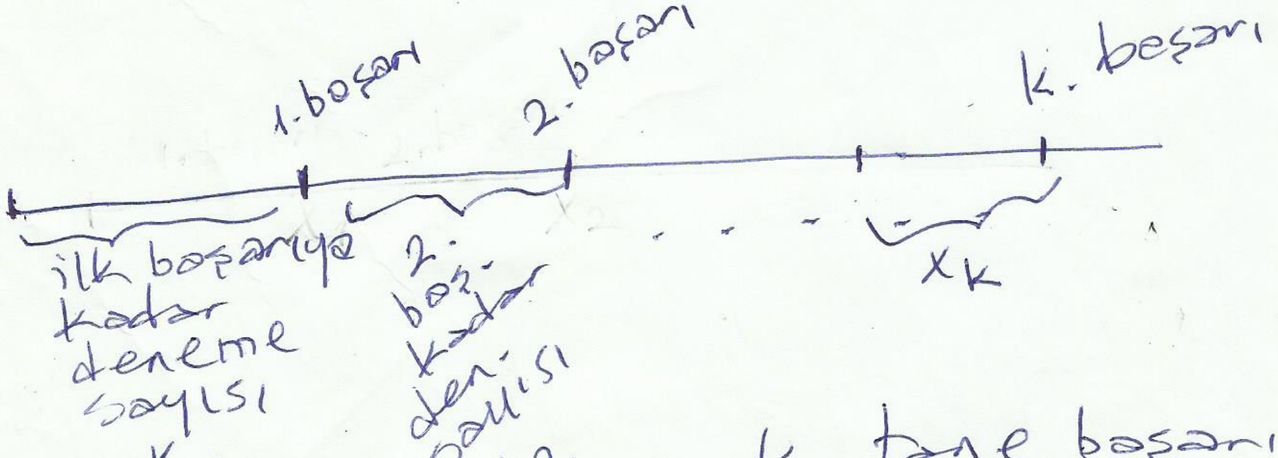
k tane başarı için gereken deneme sayısı

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

Her bir X_j bağımsız geometrik dağılıma sahiptir.

$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_k)$$
$$= \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}$$
$$= \frac{k}{p}.$$

$$V(X) = V(X_1 + \cdots + X_k)$$
$$= \frac{q}{p^2} + \cdots + \frac{q}{p^2} = \frac{kq}{p^2} \text{ dur.}$$



k tane başarı için

$X = X_1 + \cdots + X_k$ deneme sayısı

Karakteristik fonksiyonun bulunması;

I. Yol $\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{R_X} e^{itx} \cdot p(x) = \sum_{x=k}^{\infty} e^{itx} \cdot \binom{x-1}{k-1} \cdot p^k \cdot q^{x-k}$

$* \underbrace{e^{itk} \cdot e^{-itk}}_{F}$

$= p^k \cdot e^{it.k} \cdot \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} \cdot q^{x-k} \cdot e^{it.(x-k)}$

$= p^k \cdot e^{itk} \cdot \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} \cdot (e^{it} \cdot q)^{x-k}$, $*$

$= p^k \cdot e^{itk} \cdot \left[1 + k \cdot (e^{it} \cdot q) + \frac{k \cdot (k+1)}{2!} \cdot (e^{it} \cdot q)^2 + \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3!} \cdot (e^{it} \cdot q)^3 + \ldots \right]$

Not : $(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$

$(1-x)^{-k} = 1 + \frac{k}{1!} \cdot x + \frac{k \cdot (k+1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3!} \cdot x^3 + \ldots$

Benzer olarak;

$= p^k \cdot e^{itk} \cdot (1 - q \cdot e^{it})^{-k} = \left(\frac{p \cdot e^{it}}{1 - q \cdot e^{it}} \right)^k$ // bulunur.

II. Yol $\Phi_X(t) = E(e^{itX})$, $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ bağımsız geometrik dağılımlı t.d. ler.

$= E(e^{it.(X_1 + \ldots + X_k)})$

$= E(e^{itX_1} + \ldots \, {}^{itX_k})$

$= E(e^{itX_1} \ldots e^{itX_k}) = E(e^{itX_1}) \ldots E(e^{itX_k})$

$i = 1, 2, \ldots, k$ için X_i'ler geometrik dağılıma sahip ve $\Phi_X(t) = \frac{p \cdot e^{it}}{1 - q \cdot e^{it}}$ dir.

$\Rightarrow = \left(\frac{p \cdot e^{it}}{1 - q \cdot e^{it}} \right) \ldots \left(\frac{p \cdot e^{it}}{1 - q \cdot e^{it}} \right)$ k tane

$= \left(\frac{p \cdot e^{it}}{1 - q \cdot e^{it}} \right)^k$ elde edilir.

Örnek: Bir sözlü sınavda bir öğrencinin bir soruya doğru cevap verme olasılığı 1/3 old. göre; a.) 5 doğru cevabı 10. soruda vermesi olasılığı nedir. b.) Beklenen ~~doğru~~ cevaplanması gereken ~~cevap~~ soru sayısını bulunuz. c.) Dağılımın varyansını ve karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: X: Cevaplanan soru sayısı olsun,

k: Doğru cevap sayısı,

$$\left.\begin{array}{l} p=\frac{1}{3} \\ X=10 \\ k=5 \end{array}\right\} \text{ olan negatif binom dağılımıdır.}$$

$$\binom{x-1}{k-1}\cdot p^k \cdot q^{x-k}, \quad x=k,k+1,\ldots$$

a.) $$p(X=10) = \binom{10-1}{5-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$=\frac{9!}{4!\,.\,5!}\cdot\frac{1}{243}\cdot\frac{32}{243}$$

$$=\frac{9.\cancel{8}.7.\cancel{6}}{\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{4}}\cdot\frac{1}{243}\cdot\frac{32}{243} = 0,068$$

b.) Beklenen doğru cevap sayısı,

$$E(x)=\frac{k}{p}=\frac{5}{\frac{1}{3}}=15$$ (5 doğru cevap olması için beklenen (cevaplanan) soru sayısı)

c.) $$V(x)=\frac{k.q}{p^2}=5.\frac{2}{3}.9=30$$

$$\Phi_x(t)=\left(\frac{\frac{1}{3}.e^{it}}{1-\frac{2}{3}.e^{it}}\right)^5=\left(\frac{e^{it}}{3-2.e^{it}}\right)^5$$

Örnek: Bir zarın atılışında 1 gelmesi ile ilgileniliyor. Buna göre;

a.) Yedinci atışta üçüncü kez 1 gelme olasılı...

b.) Üçüncü kez 1 gelmesi için 5 den az atış gerekmesi olasılığı nedir.

Çözüm: X: Yapılan atış sayısı olsun.

k: 1 gelme sayısı

1 gelme olasılığı,

$p = \frac{1}{6}$

a.) $p(X=7) = \binom{x-1}{k-1} \cdot p^k \cdot q^{x-k}$, $x = k + k+1, \dots$

$= \binom{7-1}{3-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,034$ //

b.) $p(X<5) \longrightarrow$ 5'den az atışta üç kere 1 gelecek,

$= p(X=3) + p(X=4)$

$= f(3) + f(4) = \binom{2}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^1$

$= 0,00463 + 0,01157$

$= 0,0162$ //

Örnek: Bir para yazı gelinceye kadar atılacak, Atış sayısının olasılık fonk. bulunuz, 8. atışta ilk yazı gelme olasılığını bulun (Geometrik dağılım)

Çözüm: X: ilk yazı gelinceye kadar yapılan atışların sayısı olsun.

$p = \frac{1}{2}$ yazı gelme olasılığı,

$p(X=x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & d.h. \end{cases}$

8. atışta ilk yazı gelme olasılığı

$p(X=8) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}$ //